CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”,

EDIȚIA a XX-a, BĂILEȘTI, 29 MARTIE 2025

CLASA a VII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Fie $a, b, c \in Q_+$ astfel încât: $\frac{a}{2b+3c} = \frac{2b}{a+3c} = \frac{3c}{a+2b}$. Valoarea produsului $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ este:
   a) 6 **b) 22** **c) 18** **d) 11;**

2. Se consideră numerele reale $A = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})\ldots(\sqrt{2025}-\sqrt{2024})$ și $B = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})\ldots(\sqrt{2025}+\sqrt{2024})$. Care relație este adevărată?
   a) $A > 1$ **b) $B < 1$** **c) $A < B$** **d) $A > B$**

3. Dacă $(x; y) \in Z\ x\ Z$ este soluție a ecuației $3x^2 - 2xy - y - 1 = 0$, atunci mulțimea determinată de $x + y$ este:
   a) $\{-2; 0\}$ **b) $\{-3; -1\}$** **c) $\{-2; 1\}$** **d) $\{-1; 1\}$;**

4. Fie ABCD un pătrat. Construim în exterior triunghiul DFC echilateral și triunghiul ECB isoscel de bază BC cu măsura unghiurilor de la bază de 75°. Măsura unghiului BFE este:
   a) $60°$ **b) $45°$** **c) $90°$** **d) $30°$;**

5. Fie ABCD un pătrat de latură a. O dreaptă variabilă d care trece prin vârful C, intersectează prelungirile laturilor AB și AD în punctele M și N. Valoarea lui $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ este
   a) $\frac{CN}{MN}$ **b) $\frac{1}{MN}$** **c) $\frac{1}{AB}$** **d) $\frac{CM}{MN}$;**

Probleme propuse de prof Mirea Mihaela Mioara, Craiova

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete.

Problema 1 (20 puncte)

Fie a, b, c numere reale nenegative, având proprietatea $a + b + c = 2\sqrt{abc}$. Demonstrați că $\frac{a^2+b^2+c^2}{4} \geq \sqrt{abc}$.

GM 6-7-8/ 2024

Problema 2 (20 puncte)

Pe latura CD a paralelogramului ABCD se consideră punctele E și F astfel încât $AB = AE = AF$. Paralela prin D la AE intersectează dreapta BE în punctul M, iar paralela prin D la AF intersectează dreapta BF în punctul N. Arătați că $CM = CN$.

Prof. Tica Leonard Gabriel, CN „Carol I” , Craiova

Timp de lucru: 2 ore și 30 min

Din oficiu se acordă : 10 puncte

BAREM DE CORECTARE CLASA a VII-a

Partea I

1. d) 2. c) 3. b) 4. b) 5. c)

Partea a II a

1. $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$……..5p

Din inegalitatea mediilor $ab+c \geq 2\sqrt{abc}, ac+b \geq 2\sqrt{abc}\,, bc+a \geq 2\sqrt{abc}$..……5p

$ab+ac+bc+a+b+c \geq 6\sqrt{abc}.$ …… 3p

$ab+ac+bc \geq 4\sqrt{abc}$……2p

$\frac{a^2+b^2+c^2}{4} \geq \frac{ab+ac+bc}{4} \geq \sqrt{abc}$……...….5p

2.

Deoarece $AB||DE$ și $DM||AE$, rezultă $\angle BAE \equiv \angle EDM$.
Din $DM||AE \Rightarrow \angle DME \equiv \angle AEB \Rightarrow \angle ABE \equiv \angle DEM$. ……..……5p

Dar, $\triangle ABE$ isoscel, deci $\angle ABE = \angle AEB \Rightarrow \angle DEM \equiv \angle DME \Rightarrow \triangle DME$ isoscel $\Rightarrow DE = DM$.

……...……5p

Deoarece $AE = AB = CD \Rightarrow \angle AED \equiv \angle CDM$ (alt. int.), rezultă că $\triangle AED \equiv \triangle CDM$ (L.U.L.), de unde obținem că $AD = CM$ (1).

…….…..……..3p

Analog, $\angle DFN \equiv \angle ABF \equiv \angle AFB \equiv \angle DNF$, deci $\triangle DNF$ isoscel $\Rightarrow DF = DN$; dar $AF = AB = CD, \angle AFD \equiv \angle CDN \Rightarrow \triangle AFD \equiv \triangle CDN$ (L.U.L.), deci $CN = AD$ (2).

…..…..…….5p

Din (1) și (2)rezultă $CM = CN$……..……..…..……..2p

